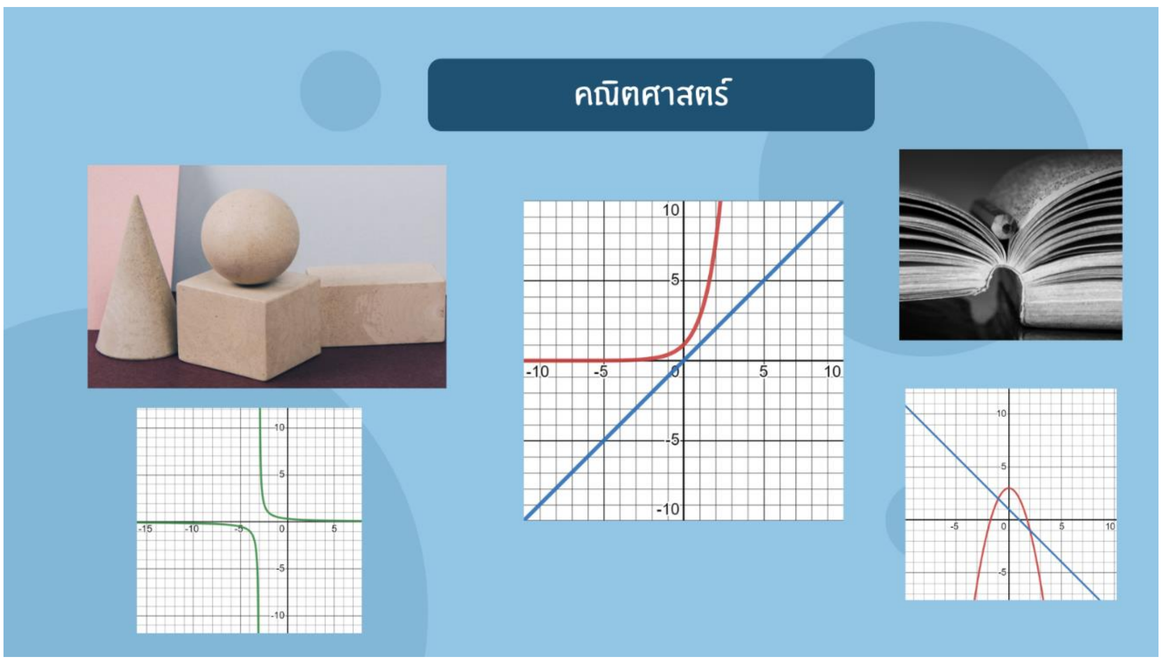
เอกสารประกอบการเรียน

วิชา 14120101 คณิตศาสตร์



อ

อาจารย์พิริยา ปรุงเลิศบัวทอง

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ

คณะวิทยาศาสตร์เทคโนโลยีและการเกษตร

มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา

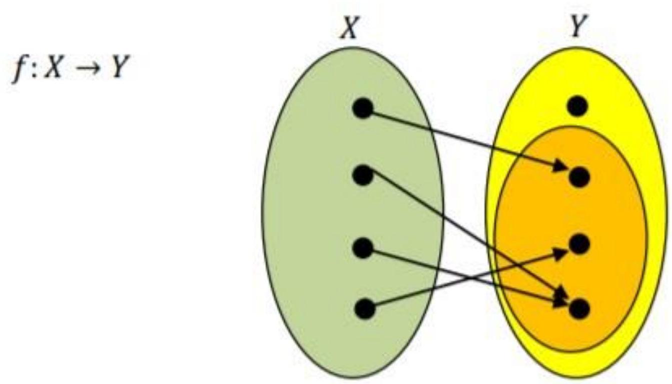
บทที่ 1 ฟังก์ชันและกราฟของฟังก์ชัน

Function and Graph of Function

1.1 นิยามของฟังก์ชัน

นิยาม 1.1 ให้ X และ Y เป็นเซตของจำนวนจริงที่ไม่ว่าง ฟังก์ชัน จาก X ไป Y คือ การส่งทุกสมาชิกในเซต X ไปยังสมาชิกในเซต Y เพียงตัวเดียว

เซต X ถูกเรียกว่า **โดเมน (Domain)** ของฟังก์ชัน แต่ละสมาชิก x ในเซต X ที่ส่งไปยังสมาชิก y ในเซต Y จะ เรียกสมาชิกใน y ในเซต Y ที่ถูกส่งจาก x ในเซต X ว่า **ภาพ (image)** ของ x และเรียกเซตของภาพทั้งหมดว่า **เรนจ์ (Range)** ของฟังก์ชัน



1.1 ข้อสังเกต สมาชิกทุกตัวในเซต X จะต้องถูกส่งมายังเซต Y หมด จะพบว่าสมาชิกแต่ละตัวของ X ถูกจับคู่กับสมาชิกใน Y เพียงตัวเดียวเท่านั้น และอาจจะมีสมาชิกบางตัวในเซต Y ที่ไม่เป็นภาพ

ตัวอย่างที่ 1.1 จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $y = x + 8$
2. $y = 2 - 4x$
3. $y = 3x - 7$
4. $y = 8 - 2(x + 1)$
5. $y = x^2$
6. $y = x^2 + x + 1$
7. $y = -3x^2 - 2x + 5$
8. $y = -x^2 + 4x - 5$
9. $y = \sqrt{x + 1}$
10. $y = \sqrt{4 - x}$
11. $y = \sqrt{4 - x^2}$
12. $y = 1/x$
13. $y = 1/(x - 1)$
14. $y = 2^x$
15. $y = 0.5^x$
16. $y = 2^{-x}$
17. $y = |x|$
18. $y = |x + 1|$
19. $y = |x| + 1$
20. $y = \frac{2x-3}{x+4}$
21. $y = \frac{x+5}{3x-2}$
22. $y = \frac{7-2x}{5x+1}$

1.2 กราฟของฟังก์ชัน

กราฟของฟังก์ชัน คือ กราฟที่กำหนดโดยสมการ $y = f(x)$ ในระบบพิกัดฉากซึ่งประกอบไปด้วยจุดที่มีคู่อันดับเป็น (x, y) โดยที่ *x* เป็นสมาชิกในโดเมนของฟังก์ชัน และ *y* หรือ *f(x)* เป็นสมาชิกในเรนจ์ของฟังก์ชันหรือเป็นค่าที่ขึ้นอยู่ *x*

ตัวอย่างที่ 1.2 จงเขียนกราฟของฟังก์ชันจากตัวอย่างที่ 1.1

ตัวอย่างที่ 1.3 จากข้อมูลการเพิ่มขึ้นของประชากรในเม็กซิโกช่วงต้นปี 1980 จะพบว่าการเพิ่มขึ้นของจำนวนประชากรจากปีหนึ่งไปยังปีถัดไปมีการเพิ่มขึ้นเสมอ (ดูในหลักที่ 3) ถ้าการเพิ่มขึ้นของประชากรเป็นเชิงเส้น ค่าในหลักที่ 3 จะ เป็นค่าคงที่

ปี ค.ศ.	จำนวนประชากร (ล้านคน)	จำนวนประชากรที่เพิ่มขึ้น (ล้านคน)
1980	67.38	
1981	69.13	1.75
1982	70.93	1.80
1983	72.77	1.84
1984	74.66	1.89
1985	76.00	1.94
1986	78.59	1.99

บทที่ 2 ลิมิตและความต่อเนื่อง

(Limits and Continuity)

ในบทนี้จะกล่าวถึงเนื้อหาที่เป็นพื้นฐานที่สำคัญในการเรียนแคลคูลัส นั่นคือลิมิตและความต่อเนื่อง ซึ่งเนื้อหาประกอบด้วยการให้นิยามและความหมาย ตลอดจนทฤษฎีต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง รวมถึงการแสดงวิธีการหาค่าของลิมิตของฟังก์ชัน และการทดสอบความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่จุดต่างๆ เพื่อให้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในเรื่องที่จะศึกษาได้อย่างถูกต้อง

2.1 ลิมิตของฟังก์ชัน (The Limit of Functions)

พิจารณาค่าของฟังก์ชัน f ซึ่งกำหนดโดย $f(x) = x^2 - x + 2$ เมื่อค่าของ x มีค่าที่ใกล้เคียงกับ 2 ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 1 ค่าของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางซ้ายมือ $(x \to 2^-)$

$x < 2$	1	1.5	1.8	1.9	1.95	1.99	1.995	1.999	$\Rightarrow$ 2
$f(x) = x^2 - x + 2$	2	2.75	3.44	3.71	3.8525	3.9701	3.985025	3.997001	$\Longrightarrow$?

และ

$x > 2$	3	2.5	2.2	2.1	2.05	2.01	2.005	2.001	$\Rightarrow$ 2
$f(x) = x^2 - x + 2$	8	5.75	4.64	4.31	4.1525	4.0301	4.01025	4.003001	$\Longrightarrow$?

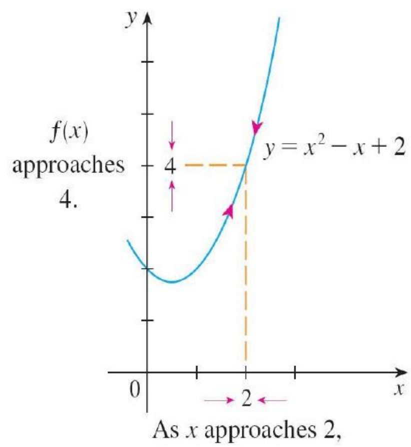
ตารางที่ 2 ค่าของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางขวามือ $(x \to 2^+)$

จากตารางข้างบน เราจะเห็นได้ว่าเมื่อค่าของ x มีค่าเข้าใกล้ 2 (จากทั้งสองด้านของ 2) แล้ว ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 4 หรือ ค่าของ $f(x)$ มีค่าที่ใกล้เคียงกับ 4 มากๆ ในกรณีดังกล่าวนี้เราจะกล่าวได้ว่า

ลิมิตของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - x + 2$ **มีค่าเท่ากับ 4 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2** โดยใช้สัญลักษณ์ต่อไปนี้

$$\lim_{x \to 2}(x^2 - x + 2) = 4$$

หรือ พิจารณาค่าของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ได้จากรูปกราฟต่อไปนี้



รูปที่ 2.1 กราฟแสดงค่าลิมิตของ $\lim_{x\to 2} x^2 - x + 2$

ต่อไปจะแสดงนิยามของลิมิต ดังนี้

บทนิยาม 2.1 ลิมิตของฟังก์ชัน f มีค่าเท่ากับจำนวนจริง L เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้จำนวนจริง a ซึ่ง เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

ก็ต่อเมื่อ ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L เมื่อค่าของ x มีค่าเข้าใกล้ a (จากทั้งสองด้านของ a) แต่ $x \neq a$

ตัวอย่างที่ 2.1 จงคำนวณค่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1

ตัวอย่างที่ 2.2 จงคำนวณค่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0

บทนิยาม 2.2 กำหนด f เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f(x)$ นิยามบนช่วงเปิดรอบจุด a จะกล่าวว่า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ k เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ถ้าสำหรับทุก $\varepsilon > 0$ แล้วมี $\delta > 0$ ที่ทำให้ ถ้า $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว $|f(x) - k| < \varepsilon$ ทั้งนี้จะเขียนแทนด้วย $\lim_{x \to a} f(x) = k$

ตัวอย่างที่ 2.3 จงแสดงว่า $\lim_{x \to 4} 3x - 5 = 7$

ตัวอย่างที่ 2.4 จงแสดงว่า $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$

จากบทนิยามที่กล่าวมาทั้งสอง เห็นว่าบทนิยามที่ 2.2 จะต้องความรู้เกี่ยวกับระบบจำนวนจริงเป็นอย่างดี และมีรายละเอียดมาก แต่เราจะเน้นให้เห็นถึงการนำทฤษฎีบทของลิมิตมาประยุกต์ใช้เพื่อการหาลิมิตของฟังก์ชันต่างๆ รวมทั้งบทประยุกต์อื่นๆที่จะได้กล่าวในบทต่อๆไป

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นเครื่องมือที่จะช่วยในการหาลิมิตของฟังก์ชันต่างๆ

ทฤษฎีบทที่ 2.1 ให้ $\lim_{x \to a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \to a} g(x) = M$ เมื่อ L และ M เป็นจำนวนจริงใดๆ จะได้ว่า

1. $\lim_{x \to a} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใดๆ
2. $\lim_{x \to a} \left(f(x) \pm g(x)\right) = L \pm M$
3. $\lim_{x \to a} cf(x) = cL$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใดๆ
4. $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = LM$
5. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$
6. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ และ $f(x) \geq 0$

ตัวอย่างที่ 2.5 จงใช้ทฤษฎีบท 2.1 เพื่อหาค่าลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1) $\lim_{x \to a} x^2$

(2) $\lim_{x \to 1} (x^2 + 2x + 1)$

(3) $\lim_{x \to 2} \frac{2x^2+3x-1}{x^3+1}$

(4) $\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^3+2x+3}{x^2+5}}$

ทฤษฎีบทที่ 2.2 (ลิมิตของฟังก์ชันพหุนาม) ถ้า

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

เป็นฟังก์ชันพหุนาม และ x_0 เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0$$

ตัวอย่างที่ 2.6 จงหาลิมิต $\lim_{x\to 3}(x^2+7x-5)$

ตัวอย่างที่ 2.7 จงหาลิมิต $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$

ตัวอย่างที่ 2.8 จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

(1) $\lim_{x\to -2}(3x^2-5x+4)$

(2) $\lim_{x\to 2}(4x^2-3)^3$

(3) $\lim_{x\to 1}\frac{(2x+4)^3}{(2-5x)^4}$

(4) $\lim_{x\to -1}\sqrt[3]{3x^2+6x-5}$

(5) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

(6) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$

2.2 ลิมิตซ้ายและลิมิตขวา (Left-Hand and Right-Hand Limits)

บทนิยาม 2.3 กำหนด $f(x)$ นิยามบนช่วงเปิด (b,a) โดยที่ $b<a$ และถ้า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ K เมื่อ x เข้าใกล้ a ในช่วง (b,a) แล้ว กล่าวได้ว่า f มีลิมิตซ้ายที่ a เท่ากับ K และจะเขียนแทนด้วย $\lim_{x\to a^-} f(x)=K$

บทนิยาม 2.4 กำหนด $f(x)$ นิยามบนช่วงเปิด (a,c) โดยที่ $c>a$ และถ้า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L เมื่อ x เข้าใกล้ a ในช่วง (a,c) แล้ว กล่าวได้ว่า f มีลิมิตขวาที่ a เท่ากับ L และจะเขียนแทนด้วย $\lim_{x\to a^+} f(x)=L$

ตัวอย่างที่ 2.9 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

(1) $\lim_{x\to 2^-} 5x-7$

(2) $\lim_{x\to 1^+} 2-4x$

(3) $\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}$

(4) $\lim_{x\to 3^+}\sqrt{x-6}$

ทฤษฎีบทที่ 2.3 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ และ $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

ตัวอย่างที่ 2.10 ให้หาค่าลิมิตต่อไปนี้

(1) $\lim_{x \to 1} 7x - 6$

(2) $\lim_{x \to 5} \frac{|x-5|}{x-5}$

ตัวอย่างที่ 2.11 ให้หาค่าลิมิตต่อไปนี้

(1) $\lim_{x \to 3} f(x)$ โดยที่ $f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & ; x \leq 3 \\ x + 1 & ; x > 3 \end{cases}$

(2) $\lim_{x \to 2} f(x)$ โดยที่ $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \leq 2 \\ 3x - 1 & ; x > 2 \\ 4 & ; x = 2 \end{cases}$

2.3 ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้บวกหรือลบอนันต์

ในการพิจารณาขอบเขตของ $f(x)$ จำเป็นต้องศึกษาถึงค่าของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเพิ่มมากขึ้นไปจนถึงบวกอนันต์ หรือลดลงจนถึงลบอนันต์ บทนิยามต่อไปนี้จะช่วยในการศึกษาเรื่องนี้

บทนิยาม 2.5 $\lim_{x\to\infty} f(x) = K$ หมายถึง $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ K (หรือมีค่าลิมิต $= K$) เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้อนันต์

บทนิยาม 2.6 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ หมายถึง $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L (หรือมีค่าลิมิต $= L$) เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ลบอนันต์

ตัวอย่างที่ 2.11 จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ เมื่อกำหนด c เป็นจำนวนจริง

(1) $\lim_{x\to\infty} c$ (2) $\lim_{x\to-\infty} c$

(3) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ (4) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$

ทฤษฎีบทที่ 2.4 ถ้า $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = K$ และ $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = L$ โดยที่ K และ L เป็นจำนวนจริง แล้ว

1. กฎการบวก $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) + g(x) = K + L$
2. กฎการลบ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - g(x) = K - L$
3. กฎการคูณ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)g(x) = KL$
4. กฎการหาร $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{K}{L}$ เมื่อ $L \neq 0$
5. กฎการคูณด้วยค่าคงที่ $\lim_{x\to\pm\infty} cf(x) = cK$ เมื่อ c เป็นจำนวนเต็มบวก
6. กฎของราก $\lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x)\right)^{1/n} = K^{1/n}$ เมื่อ n เป็นจานวนเต็มบวก

    (K ต้องมีค่ามากกว่า 0 ถ้า n เป็นเลขคู่)

ตัวอย่างที่ 2.12 จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

(1) $\lim_{x\to\infty} 8 + \frac{2}{x}$

(2) $\lim_{x\to-\infty} \frac{5}{x^2}$

(3) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-9x+3}{4x^2+7}$

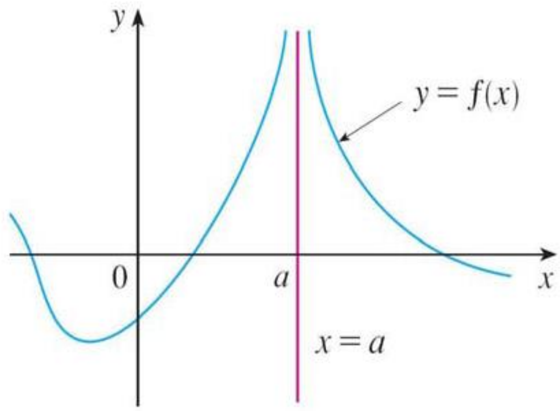
(4) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+x+4}{2x-1}$

(5) $\lim_{x\to\infty} \frac{4x+3}{3x^2-2x+7}$

(6) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{4x-8}$

2.4 ลิมิตค่าอนันต์

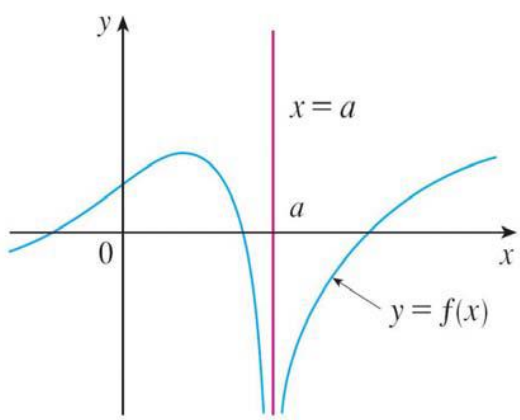
กรณีที่ 1 : พิจารณาลักษณะกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 1.2 กราฟแสดง $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

จากรูปที่ 1.2 เราเห็นว่าได้ว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a นั้น $f(x)$ มีค่ามากขึ้นจนไม่มีขอบเขต ดังนั้น เราจะกล่าวว่า ลิมิตของ $f(x)$ ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ a มีค่าเป็นบวกอนันต์ และ เขียนแทนด้วย $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

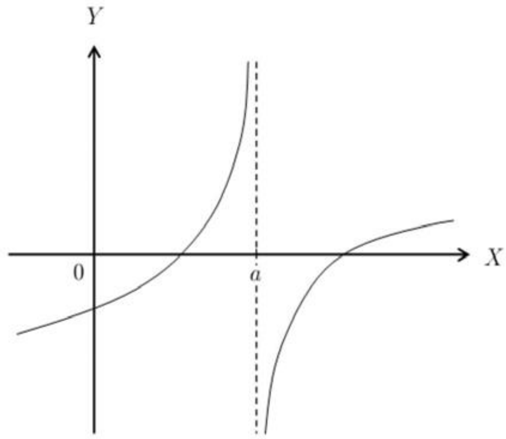
กรณีที่ 2 : พิจารณาลักษณะกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 1.3 กราฟแสดง $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

จากรูปที่ 1.3 จะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a นั้น $f(x)$ มีค่าน้อยลงจนไม่มีขอบเขต ดังนั้น เราจะกล่าวว่า ลิมิตของ $f(x)$ ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ a มีค่าเป็นลบอนันต์ และ เขียนแทนด้วย $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

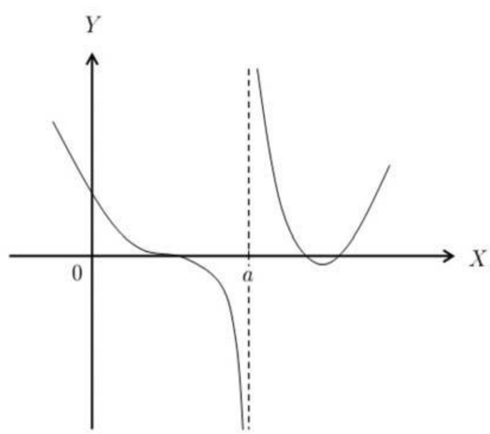
กรณีที่ 3 : พิจารณาลักษณะกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$



รูปที่ 1.4 กราฟแสดง $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ และ $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

จากรูปที่ 1.4 เราเห็นได้ว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางซ้ายนั้น $f(x)$ มีค่ามากขึ้นจนไม่มีขอบเขต ลักษณะเช่นนี้ เราจะกล่าวว่า ลิมิตของ $f(x)$ ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางซ้ายมีค่าเป็นบวกอนันต์ และ เขียนแทนด้วย $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ และเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางขวา $f(x)$ มีค่าน้อยลงจนไม่มีขอบเขต และเราจะกล่าวว่า ลิมิตของ $f(x)$ ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางขวามีค่าเป็นลบอนันต์ และเขียนแทนด้วย $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

กรณีที่ 4 : พิจารณาลักษณะกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$



รูปที่ 1.5 กราฟแสดง $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ และ $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$

ทำนองเดียวกันจากรูปที่ 1.5 จะได้ว่า $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ และ $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$

ข้อสังเกต 2.1 สัญลักษณ์ $+\infty$ และ $-\infty$ **ไม่ใช่จำนวนจริง** ดังนั้นเราอาจกล่าวว่า $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ หรือ $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ ว่า $\lim_{x\to a} f(x)$ ไม่มีค่า

ทฤษฎีบทที่ 2.5 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ เมื่อ } L \neq 0 \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

ดังนั้น

(1)

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -\infty & \text{เมื่อ } L < 0 \\ +\infty & \text{เมื่อ } L > 0 \end{cases}$$

เมื่อ $g(x) > 0$ ทุกๆ $x \in (a-\delta, a+\delta)$ สำหรับบาง $\delta > 0$

(2)

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{เมื่อ } L < 0 \\ -\infty & \text{เมื่อ } L > 0 \end{cases}$$

เมื่อ $g(x) < 0$ ทุกๆ $x \in (a-\delta, a+\delta)$ สำหรับบาง $\delta > 0$

ทำนองเดียวกัน ทฤษฎีบท 2.5 ยังเป็นจริงสำหรับ $x \to a^+, x \to a^-,\ x \to +\infty$ และ $x \to -\infty$

ตัวอย่างที่ 2.13 กำหนดให้

$$f(x) = \frac{4x}{x-3}$$

จงหาค่า $\lim_{x\to 3^-} f(x)$, $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ และ $\lim_{x\to 3} f(x)$

ตัวอย่างที่ 2.14 จงหา $\lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x^2+2x-3}$

ตัวอย่างที่ 2.15 จงหา $\lim_{x\to 0} \left(\frac{5}{x^2} - \frac{2}{x} - 4\right)$

2.5 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

บทนิยามที่ 2.7 ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงและ $a \in \mathbb{R}$ เราจะกล่าวว่า f ต่อเนื่องที่จุด $x = a$ ก็ต่อเมื่อ

1. $f(a)$ มีค่า
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ มีค่า
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

ตัวอย่างที่ 2.16 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{เมื่อ } x < -1 \\ 2x+1 & \text{เมื่อ } -1 \le x < 2 \\ x^2+1 & \text{เมื่อ } x \ge 2 \end{cases}$

จงพิจารณาว่า f ต่อเนื่องที่จุด $x = -1$ และ $x = 2$ หรือไม่เพราะเหตุใด

ตัวอย่างที่ 2.17 กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

จงพิจารณาว่า f ต่อเนื่องที่จุด $x = 1$ หรือไม่เพราะเหตุใด

บทที่ 3 อนุพันธ์ (Derivative)

3.1 อนุพันธ์

บทนิยามที่ 3.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง จะกล่าวว่า ฟังก์ชัน f มีอนุพันธ์ได้ที่ x ก็ต่อเมื่อ $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ หาค่าได้ ถ้าลิมิตหาค่าได้ เรียกลิมิตนี้ว่าอนุพันธ์ของ f ที่ x (Derivative at x) และเขียนด้วย $f'(x)$ หรือ $\frac{dy}{dx}$ หรือ y'

ต่อไปจะพิจารณาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด a ใดๆที่อยู่ในโดเมน f สามารถเขียนได้ดังนี้

$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ หรือ $\frac{d}{dx} f(x) \mid x = a$

นอกจากนิยามที่กล่าวมาแล้วข้างต้น นิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ $x = a$ เป็น

$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$ เมื่อลิมิตหาค่าได้

ตัวอย่างที่ 3.1 ให้ $f(x) = 2\sqrt{x}$ จงหา $f'(3)$ โดยใช้นิยาม

ตัวอย่างที่ 3.2 จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = x^2 + 5x - 4$ ที่ $x = 1, x = 2$ และ $x = 3$ โดยใช้นิยาม

ทฤษฎีบทที่ 3.1 ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่ $x = c$ แล้ว f ต่อเนื่องที่ $x = c$

ตัวอย่างที่ 3.3 จงแสดงว่า $f = \frac{1}{x+1}$ ต่อเนื่องที่ $x = 5$

บทนิยามที่ 3.2 กำหนดให้ $y = f(x)$ และ a เป็นจุดใดๆ ในโดเมนของ f จะได้

1. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อค่า x เปลี่ยนจาก a เป็น $a + h$ คือ $\frac{f\,(a+h) - f(a)}{h}$
2. อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะที่ $x = a$ คือ $\lim_{h \to 0} \frac{f\,(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$
3. ความชันของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $(a, f(a))$ คือ $f'(a)$

ตัวอย่างที่ 3.4 กำหนด $y = x^2 + 3x - 4$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก 1 เป็น 1.2 และอัตราการเปลี่ยนแปลงขณะ $x = 1$ พร้อมทั้งหาความชันของเส้นโค้งที่ $x = 1$

3.2 สูตรการหาอนุพันธ์

ทฤษฎีบทที่ 3.2 ถ้า $f(x) = c$ สำหรับทุก $X \in \mathbb{R}$ โดยที่ c เป็นค่าคงที่ แล้ว

$$f'(x) = 0 \text{ หรือ } \frac{d}{dx}(c) = 0$$

ตัวอย่างที่ 3.5 จงหา $f'(x)$

1. $f(x) = 3$
2. $f(x) = 2\pi$

ทฤษฎีบทที่ 3.3 กำหนด $f(x) = x$ จะได้ว่า $f'(x) = 1$ หรือ $\frac{d}{dx}(x) = 1$

ทฤษฎีบทที่ 3.4 ให้ $f(x) = x^n$ โดยที่ n เป็น จำนวนเต็มบวก ดังนั้น

$$f'(x) = nx^{n-1} \text{ หรือ } \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

ตัวอย่างที่ 3.6 ให้หา $\frac{dy}{dx}$

1. $y = x^5$
2. $y = \frac{1}{x^2}$
3. $y = 4x^6$
4. $y = -\frac{3}{x^{10}}$
5. $y = -2x^{14}$

ทฤษฎีบทที่ 3.5 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x และเป็นฟังก์ชันค่าจริง และให้ c เป็นค่าคงตัวใดๆ แล้วจะได้ว่า

1. $(cf)'(x) = c\,(f'(x))$
2. $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
3. $(fg)'(x) = f(x)\,g'(x) + f'(x)g(x)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

ตัวอย่างที่ 3.7 จงหาค่าอนุพันธ์ของ

1. $\frac{d}{dx}\,(2x^3)$
2. $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4}\right)$
3. $\frac{d}{dx}(\pi x^{13})$
4. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)$
5. $\frac{d}{dx}\frac{-2\sqrt{x^3}}{5}$
6. $\frac{d}{dx}\frac{\pi^2}{\sqrt{x^3}}$
7. $\frac{d}{dx}\left(\frac{6}{x^{3}}\right)$
8. $\frac{d}{dx}\left(\frac{-7}{3x^{-5}}\right)$
9. $\frac{d}{dx}\left(\frac{7}{(3x)^{-2}}\right)$
10. $\frac{d}{dx}(2x^5 - 3x^4 + 12x)$
11. $\frac{d}{dx}\left(8x^4 - \frac{3}{x^2} + 5\right)$
12. $\frac{d}{dx}\left(3x^{10} - \frac{4x^8}{3} + \frac{7}{x}\right)$
13. $\frac{d}{dx}\left(2x^2 - 5\sqrt{x}\right)$
14. $\frac{d}{dx}\left(3x^8 + 2\sqrt{x^3}\right)$
15. $\frac{d}{dx}\left(x^4 - 3\sqrt{x^5}\right)$

ตัวอย่างที่ 3.8 จงหาค่า $\frac{dy}{dx}$ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $y = \frac{2x^2+3}{\sqrt{x}}$
2. $y = (x^2 - 2x + 5)(2\sqrt{x} - 5)$

3. $y = \frac{4-3x}{x^2+4}$

4. $y = (2x^3 - 4x + 5)^2$

5. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{4}x$

6. $y = \left(\sqrt[3]{x} + 2x\right)(4x^3 - 5x^2)$

7. $y = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^5} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$

8. $y = \frac{(x+1)(x-3)}{x^2+2x+3}$

9. $y = \frac{2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}}{5+2x^2}$

10. $y = \frac{1}{x^3} + \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{5}{\sqrt[3]{x}}$

ตัวอย่างที่ 3.9 จงหาค่า f' ที่จุดที่กำหนดให้

1. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ที่ $x = 2$

2. $f(x) = \frac{3}{\sqrt[4]{x^3}} + \frac{2}{\sqrt[5]{x^4}}$ ที่ $x = 1$

3. $f(x) = \frac{2x^3+x}{2+3\sqrt{x}}$ ที่ $x = -1$

4. $f(x) = (x+1)(2x^2 + \sqrt{x})$ ที่ $x = 2$

ตัวอย่างที่ 3.10 จงหาอนุพันธ์ f ที่จุด $x = 2$ เมื่อกำหนด $f(x) = |\, x - 2 \,|$ โดยใช้นิยาม

ตัวอย่างที่ 3.11 จงหา $f'(-3)$ และ $f'(1)$ กำหนดฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \leq 1 \\ 2x - 1 & ; x > 1 \end{cases}$$

3.3 อนุพันธ์อันดับสูง (Higher Derivatives)

ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ สามารถนิยามอนุพันธ์ของอันดับที่เป็นจำนวนนับได้ โดยเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์เหล่านี้

อนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Derivative)	$y', f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx}(f(x)), D_x[y]$
อนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivative)	$y'', f''(x), \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2}{dx^2}(f(x)), D_x^2[y]$
อนุพันธ์อันดับสาม (Third Derivative)	$y''', f'''(x), \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^3}{dx^3}(f(x)), D_x^3[y]$
อนุพันธ์อันดับสี่ (Fourth Derivative)	$y^{(4)}, f^{(4)}(x), \frac{d^4y}{dx^4}, \frac{d^4}{dx^4}(f(x)), D_x^4[y]$
⋮	
อนุพันธ์อันดับ n (n^{th} Derivative)	$y^{(n)}, f^{(n)}(x), \frac{d^ny}{dx^n}, \frac{d^n}{dx^n}(f(x)), D_x^n[y]$

ตัวอย่างที่ 3.12 จงหา y' , y'' , y''' , $y^{(4)}$ เมื่อกำหนดให้

1. $y = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 10$
2. $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$

ตัวอย่างที่ 3.13 ให้ $f(x) = -\frac{x}{2x^2-3}$ แล้ว $\frac{d^2}{dx^2}(f(1))$

3.4 กฎลูกโซ่ (Chain Rule)

ทฤษฎีบทที่ 3.6 กำหนดให้ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ที่ x ได้ และ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ที่ $g(x)$ ได้ แล้วสามารถหาอนุพันธ์ที่ x ของฟังก์ชันประกอบได้

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$$

เราสามารถเขียนได้ในรูปแบบนี้ ให้ $y = f(x)$ และ $u = g(x)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งหาอนุพันธ์ได้แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ประโยชน์ของกฎลูกโซ่ หรือ ทฤษฎีบทที่กล่าวมาแล้วข้างต้น คือ ช่วยในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ที่ซับซ้อนได้ ดังจะเห็นในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3.14 จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ

1. $y = u^{24}$ และ $u = 3x^4 - 2x^2$
2. $y = 2u + \sqrt{u}$ และ $u = \frac{1}{x}$

ตัวอย่างที่ 3.15 กำหนดฟังก์ชันประกอบต่อไปนี้ จงแยกฟังก์ชันออกเป็นสองฟังก์ชัน $y = f(u)$ และ $u = g(x)$

1. $\frac{1}{x+1}$
2. $(3x^2 + 5x - 1)^{12}$
3. $\sqrt{4x^5 - 2x^3}$
4. $3\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}$
5. $\frac{x-1}{x+1}$
6. $\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)^4$

ตัวอย่างที่ 3.16 จงหา $\frac{dy}{dx}$ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $(x^2 + 2)^{2564}$
2. $\sqrt{4x^4 - 3x}$
3. $\frac{1}{2x-1}$
4. $(3x^5 - 2x^3 + 7)^{25}$
5. $\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

ถ้าฟังก์ชันประกอบเกิดจากฟังก์ชันประกอบกันมากกว่าสองฟังก์ชัน เราก็สามารถขยายกฎลูกโซ่ เพื่อหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบได้ดังนี้

ถ้า $y = f(u)\ , u = g(x)$ และ $x = h(t)$

จะได้ว่า $y = f(g(h(t)))$ ดังนั้น

$$y' = f'(g(h(t)))\ g'(h(t))\ h'(t) \text{ หรือ } \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du}, \frac{du}{dx}, \frac{dx}{dt}$$

ความหมายของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ในสาขาวิชาต่างๆกัน

	ฟังก์ชัน	อนุพันธ์ของฟังก์ชัน
1.	เส้นโค้ง $y = f(x)$	$f'(x)$ คือความชันของเส้นสัมผัส ณ จุด $(x, f(x))$
2.	สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุ $S = S(t)$	$S'(t)$ แทนความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ใดๆ แทนด้วย $V(t)$ นั่นคือ $V(t) = S'(t)$
3.	สมการความเร็วของวัตถุ $V = V(t)$	$V'(t)$ แทนความเร่งของวัตถุ ณ เวลา t ใดๆ แทนด้วย $a(t)$ นั่นคือ $a(t) = V'(t) = S''(t)$
4.	สมการการเจริญเติบโตของเชื้อราเทียบกับเวลา t ใดๆ $G = f(t)$	$f'(t)$ หมายถึงอัตราการเจริญเติบโตของ เชื้อรา ณ เวลา t ใดๆ
5.	สมการการเปลี่ยนแปลงของการเกิดปฏิกิริยาเคมีเทียบกับเวลา t ใดๆ $R = R(t)$	$R'(t)$ หมายถึง อัตราการเปลี่ยนแปลงของการเกิดปฏิกิริยาเคมี ณ เวลา t ใดๆ

อนุพันธ์ถือเป็นหัวใจสำคัญของแคลคูลัส เนื่องจากสามารถประยุกต์ได้หลายสาขาวิชา เช่น วิศวกรรม การแพทย์ เศรษฐศาสตร์ เป็นต้น ต่อไปจะกล่าวถึงบทประยุกต์ของอนุพันธ์

3.5 การประยุกต์อนุพันธ์

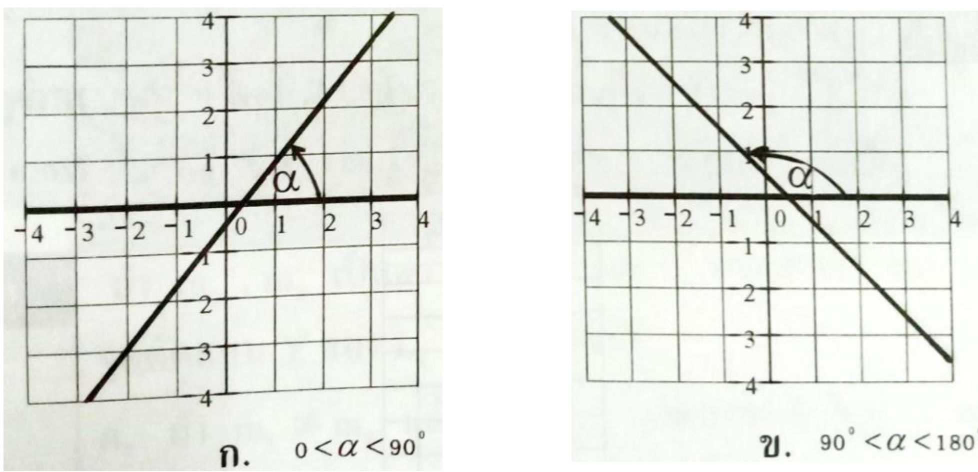
3.5.1 สมการเส้นสัมผัสและเส้นตั้งฉาก

ขอเริ่มจากความหมายของมุมเอียงของเส้นตรงก่อน ดังนี้

บทนิยามที่ 3.3 มุมเอียง (Inclination) ของเส้นตรง $\boldsymbol{L}$ เขียนแทนด้วย α (อัลฟา) หมายถึง มุมที่วัดทวนเข็มนาฬิกา มีเครื่องหมายเป็นบวก ที่เล็กที่สุดที่วัดจากแกน X ทางบวกไปยังเส้นตรง L ดูรูป 3.1

<u>หมายเหตุ</u> 1. กรณีเส้นตรง L ขนานกับแกน X เราให้ $\alpha = 0$

2. ถ้า α แทน มุมเอียงของเส้นตรง L จะได้ $0 \leq \alpha \leq 180^{\circ}$



รูปที่ 3.1 มุมอียง

บทนิยามที่ 3.4 ความชันของเส้นตรง $\boldsymbol{L}$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ m ที่มีมุมเอียง $\alpha \neq 90^{\circ}$ ให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $P(x_1, y_1)$ และ $Q(x_2, y_2)$ โดยที่ $(x_1 \neq x_2)$ จะได้ว่า

ความชันของเส้นตรง $L = m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

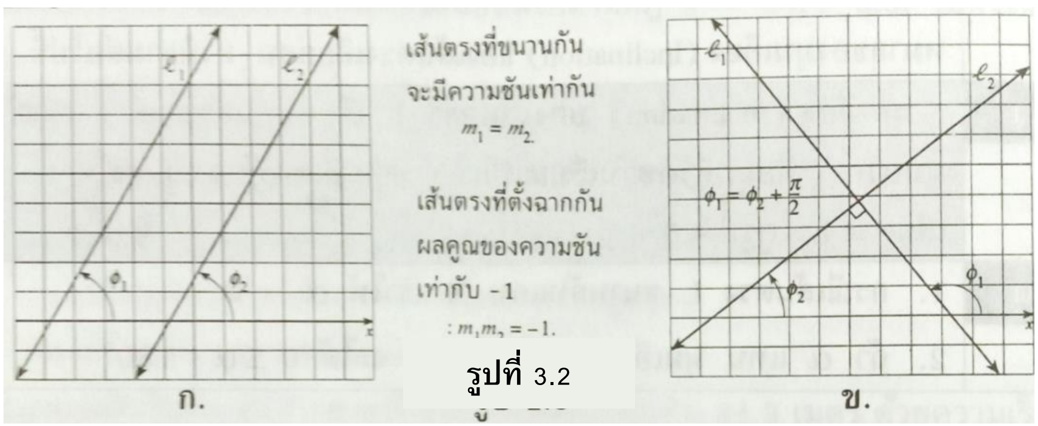
บทนิยามที่ 3.5 เส้นขนานและเส้นตั้งฉาก (Parallel and Perpendicular Lines)

ให้เส้นตรง L_1 และ L_2 มีมุมเอียง α_1 และ α_2 ตามลำดับ

- ถ้า $\alpha_1 = \alpha_2$ เราจะกล่าวว่า **เส้นตรง L_1 ขนานกับเส้นตรง L_2** เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $L_1 // L_2$
- ถ้า $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ$ เราจะกล่าวว่า **เส้นตรง L_1 ตั้งฉากกับเส้นตรง L_2** เขียนแทนด้วย $L_1 \perp L_2$

กำหนดให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงที่มีมุมเอียง $\alpha_1 \neq 90^\circ, \alpha_2 \neq 90^\circ$ ตามลำดับ และมีความชัน m_1, m_2 ตามลำดับ

- $m_1 = m_2$ ก็ต่อเมื่อ L_1 ขนานกับ L_2 ดังรูปที่ 3.2 ก
- $m_1 m_2 = -1$ ก็ต่อเมื่อ L_1 ตั้งฉากกับ L_2 โดยที่ $m_1 m_2 \neq 0$ ดังรูปที่ 3.2 ข

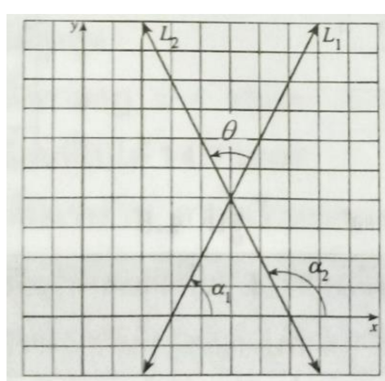


รูปที่ 3.2

บทนิยามที่ 3.6 (มุมระหว่างเส้นตรงสองเส้น)

ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงที่ไม่ขนานกัน และตัดกันที่จุด P **มุมบวกที่จุด P โดยวัดจาก L_1 ไปยัง L_2** เราจะเรียกว่า " **มุมจาก L_1 ไปยัง L_2" (Angle from L_1 to L_2)**

<u>หมายเหตุ</u> ถ้าให้ θ เป็นมุมจาก L_1 ไปยัง L_2 จะได้ว่า $\pi - \theta$ เป็นมุมจาก L_1 ไปยัง L_2 ดังรูป 3.3



รูปที่ 3.3

3.5.1.1 สมการของเส้นตรง (Equation of a Straight Line)

1. สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $P(x_1, y_1)$ และมีความชัน m

   คือ $$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

2. สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $P(x_1, y_1)$ และ $Q\ (x_2, y_2)$

   คือ $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ เมื่อ } x_1 \neq x_2$$

3. สมการเส้นตรงที่มีจุดตัดแกน y เท่ากับ b และมีความชัน m

   คือ $$y = mx + b$$

4. สมการที่อยู่ในรูปทั่วไป คือ $Ax + By + C = 0$

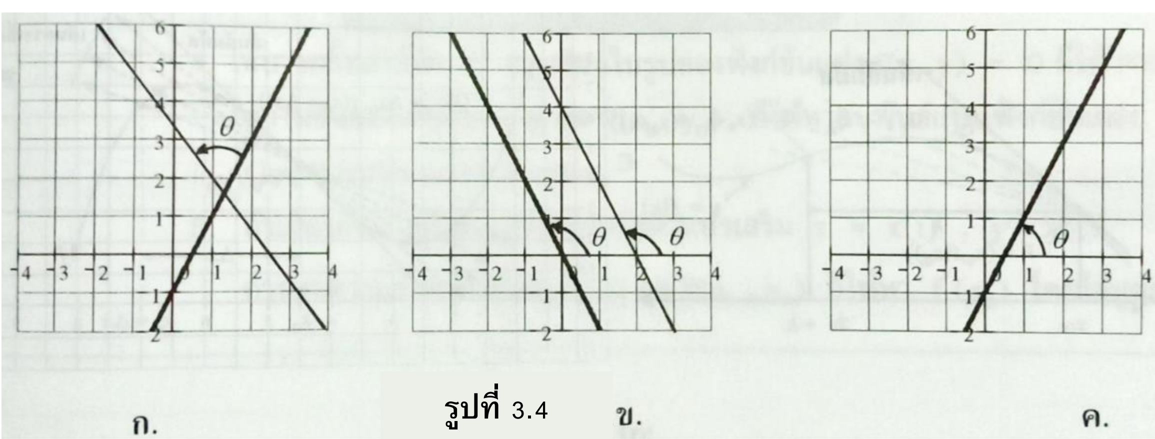
   โดยที่ A, B และ C เป็นจำนวนจริงใดๆ และ A กับ C ต้องไม่เท่ากับ 0 พร้อมกัน เรียกว่า **เป็นสมการรูปทั่วไปของเส้นตรง (General Equation of a Line)**

<u>หมายเหตุ</u> ถ้า m_1, m_2 เป็นความชันของเส้นตรง L_1 และ L_2 ตามลำดับ และ b_1, b_2 เป็นจุดตัดแกน Y ของ L_1 และ L_2 ตามลำดับ จะได้

(ก.) ถ้า $m_1 \neq m_2$ แล้ว เส้นตรง L_1 และ L_2 จะต้องตัดกันที่จุดๆหนึ่ง

(ข.) ถ้า $m_1 = m_2$ และ $b_1 \neq b_2$ แสดงว่า ความชันเท่ากัน แต่ตัดแกน Y ที่จุดต่างกัน จะได้ว่า L_1 ขนานกับ L_2

(ค.) ถ้า $m_1 = m_2$ และ $b_1 = b_2$ แสดงว่า ความชันเท่ากัน และตัดแกน Y ที่จุดเดียวกัน จะได้ว่า L_1 และ L_2 จะเป็นเส้นตรงเดียวกัน ดูรูป 3.4



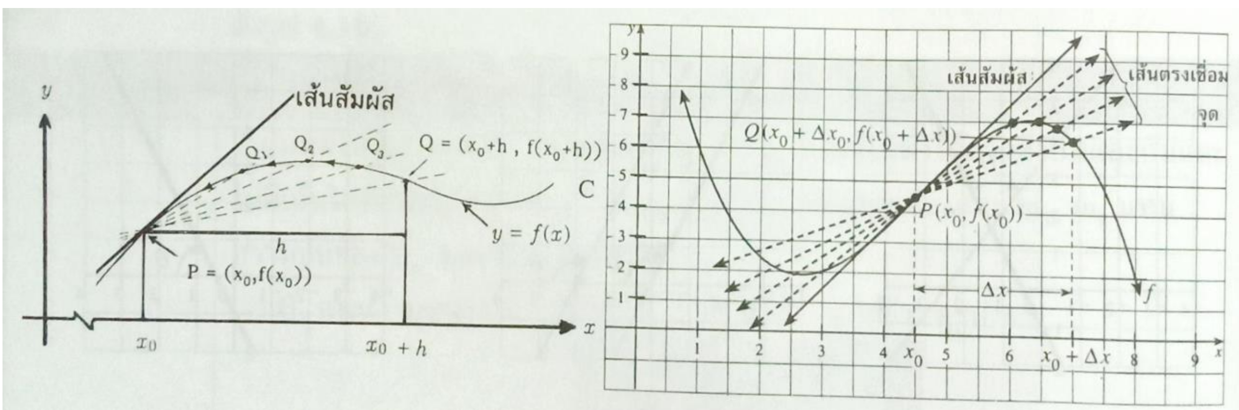
รูปที่ 3.4

3.5.1.2 ความชันของเส้นสัมผัส (The Slope of a Tangent Line)

นิยามของเส้นสัมผัสของเส้นโค้งในรูปแบบลิมิตของฟังก์ชัน สามารถนิยามโดยกำหนดให้ เส้นโค้ง C เป็นกราฟของฟังก์ชันต่อเนื่อง $y = f(x)$ ดังรูป 3.5 ให้ P เป็นจุดหนึ่งบนกราฟของเส้นโค้ง C มีพิกัด $\left(x_0, f(x_0)\right)$ และ Q เป็นจุดอีกจุดหนึ่งบนเส้นโค้ง C ที่แตกต่างจากจุด P มีพิกัด $\left(x_0 + h, f(x_0 + h)\right)$ จะได้ว่าเส้นตรง PQ เป็นเส้นตรงตัดกราฟ (Secant Line) ของเส้นโค้ง C

จากบทนิยามของความชัน จะได้ว่า เส้น PQ มีความชัน เท่ากับ

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



รูปที่ 3.5

จากรูป 3.5 พบว่า เมื่อจุด Q เคลื่อนที่ตามกราฟของเส้นโค้ง C เข้าหาจุด P ถ้าให้ $h \to 0$ จุด Q จะเข้าใกล้จุด P ทำให้ได้ความชันของเส้นตรง PQ จะเข้าใกล้ความชันของเส้นสัมผัสที่จุด P

นั่นคือ ความชันของเส้นสัมผัสที่จุด P กำหนดโดย

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

บทนิยามที่ 3.7 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ x_0 **เส้นสัมผัสของกราฟของ f ที่จุด $P\left(x_0, f(x_0)\right)$** หมายถึง เส้นตรงที่ผ่านจุด P และมีความชัน เท่ากับ

$$\frac{d_y}{d_x}\bigg|_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

หมายเหตุ 1. **ความชันของเส้นตรง** เขียนแทนด้วย m

2. **สมการเส้นสัมผัส** ณ จุด $P(x_0, y_0)$ และมีความชันของเส้นตรง m คือ

T:
$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

3. **และสมการเส้นปกติ (Normal Line)** ซึ่งตั้งฉากกับเส้นสัมผัส ณ จุด $P(x_0, y_0)$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ N มีความชัน เท่ากับ $-\frac{1}{f'(x_0)}$ คือ

N:
$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x)}(x - x_0)$$

ตัวอย่างที่ 3.17 จงหาสมการของเส้นสัมผัสและเส้นปกติของเส้นโค้ง $y = x^2 - 4x$ ณ $x = 3$

ตัวอย่างที่ 3.18 จงหาสมการของเส้นสัมผัสและเส้นปกติของเส้นโค้ง $x^2 - xy + y^2 = 7$ ณ จุด $(-1,2)$

ตัวอย่างที่ 3.19 จงหาจุดที่เส้นสัมผัสเส้นโค้งสอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้

1. $y = x^3 + 2x^2 - 5$ ขนานกับแกน x

2. $y = 3x^2 + 2x - 7$ ตั้งฉากกับเส้นตรง $2x - 3y + 6 = 0$

แบบฝึกหัดที่ 3.1 เรื่อง สมการเส้นสัมผัสสมการปกติ

จงหาสมการเส้นสัมผัสและสมการเส้นปกติ ณ จุดที่กำหนดให้

1. $y = x^2 + 1\,, (2,5)$
2. $y = 4 - x^2\,, (-1,3)$
3. $y = \sqrt{x}\,, (1,1)$
4. $y = \sqrt{x+1}\,, (3,2)$

แบบฝึกหัดที่ 3.2 จงหาจุดที่เส้นสัมผัสเส้นโค้งสอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้

1. $y = 2x^4 - 6x^2 + 1$ ขนานกับแกน x

2. $2x + xy - y - 5 = 0$ ตั้งฉากกับเส้นตรง $y = x + 2$

3. $y = x^2 + 5$ ขนานกับเส้นตรง $12x - y - 17 = 0$

4. $x^2 - xy - y - 3 = 0$ ตั้งฉากกับเส้นตรง $x = \sqrt{3}$

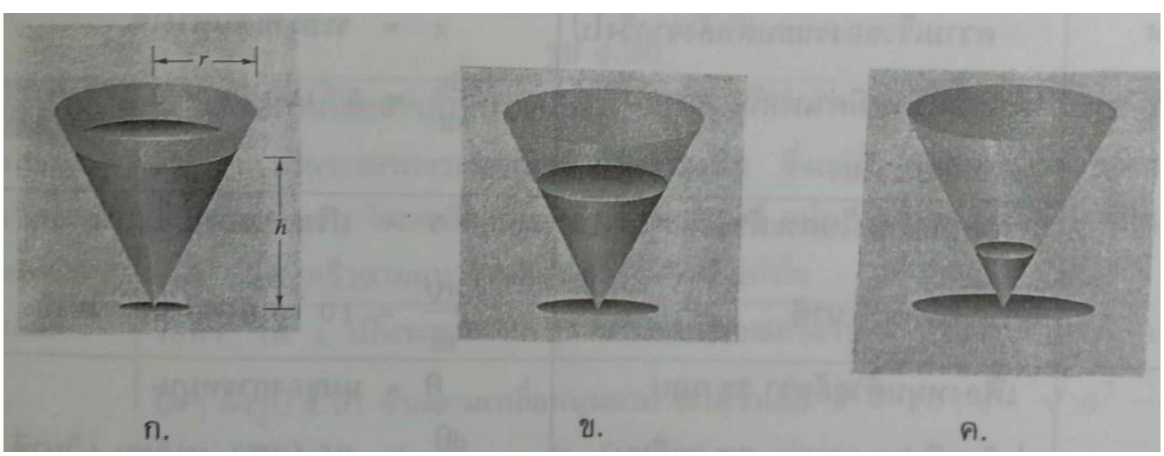
3.5.2 อัตราสัมพัทธ์ (Related Rates)

อัตราสัมพัทธ์เป็นการคำนวณอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณอันหนึ่งในเทอมของการเปลี่ยนแปลงของอีกปริมาณอันหนึ่ง ซึ่งอาจมีเกินหนึ่งปริมาณได้ โดยต้องสร้างสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณต่างๆและใช้กฎลูกโซ่ (Chain Rule) ในการหาอนุพันธ์ทั้งสองข้างของสมการเทียบกับเวลา t

ตัวอย่างที่ 3.20 ลูกบอลลูนถูกเติมก๊าซ ในขณะที่รัศมี 2 ฟุต จนทำให้รัศมีเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา $\frac{1}{6}$ ฟุต/วินาที จงพิจารณาว่าในขณะเวลาเดียวกันนี้ปริมาตรจะเปลี่ยนแปลงด้วยอัตราเท่าไหร่

ตัวอย่างที่ 3.21 ภาชนะรูปทรงกรวยดังรูป 1 มีน้ำบรรจุอยู่และปล่อยน้ำไหลออกมาตามกรวยกลม ปริมาตร v รัศมี r และความสูง h ของระดับน้ำในรูปที่ 3.6 ก ต่างก็เป็นฟังก์ชันของเวลา t เราจะได้ตัวแปรทั้งสามมีความสัมพันธ์กันดังสมการ

$$v = \frac{\pi}{3} r^2 h$$



รูปที่ 3.6

หมายเหตุ อัตราการเปลี่ยนแปลงจะเป็นบวกเมื่อเวลาเพิ่มขึ้นแล้วปริมาณเพิ่มขึ้นด้วย และอัตราการเปลี่ยนแปลงจะเป็นลบเมื่อเวลาเพิ่มขึ้นแล้วปริมาณนั้นลดลง กล่าวคือ เมื่อ x เป็นปริมาณที่ขึ้นกับเวลา t

ถ้า t เพิ่มขึ้น แล้ว x เพิ่มขึ้น จะได้ว่า $\frac{dx}{dt} > 0$

ถ้า t เพิ่มขึ้น แล้ว x ลดลง จะได้ว่า $\frac{dx}{dt} < 0$

ขั้นตอนในการแก้โจทย์ที่เกี่ยวกับอัตราสัมพัทธ์

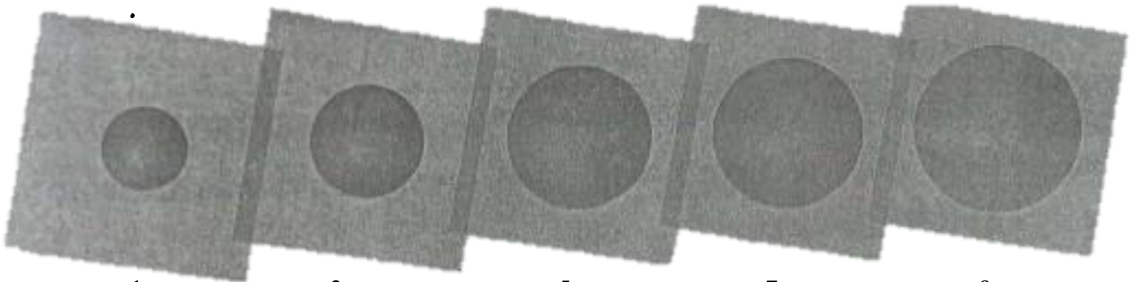
1. เขียนรูปประกอบที่เวลา t ใดๆ และตรวจดูว่าปริมาณอะไรบ้างที่เป็นตัวแปรซึ่งขึ้นอยู่กับเวลา

2. หาสมการแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรต่างๆที่เป็นจริงสำหรับทุกขณะที่เวลา t ใดๆ

3. หาอนุพันธ์ของสมการเทียบกับเวลา ซึ่งจะทำให้ได้สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราต่างๆ

4. แทนค่าต่างๆได้แก่ ค่าอัตราต่างๆ ค่าปริมาณต่างๆที่โจทย์กำหนด โดยต้องคำนึงถึงเครื่องหมายด้วย แล้วหาอัตราการเปลี่ยนแปลงที่ต้องการทราบ ณ จุดต่างๆหรือ ณ เวลาต่างๆ

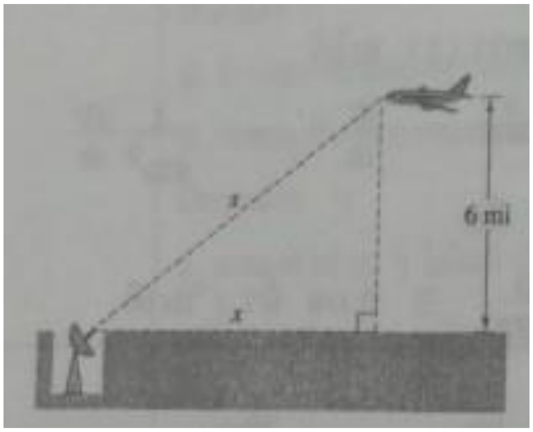
ตัวอย่างที่ 3.22 อากาศกำลังถูกสูบเข้าไปในลูกบอลทรงกลมด้วยอัตรา 4.5 ลูกบาศก์นิ้วต่อนาที ดังแสดงในรูปที่ 3.7 จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมี เมื่อรัศมี 2 นิ้ว



t=1 t=3 t=5 t=7 t=9

รูปที่ 3.7

ตัวอย่างที่ 3.23 เครื่องบินโดยสารลำหนึ่งกำลังจะบินผ่านสถานีเรด้าตรวจจับดังแสดงในรูปที่ 3.8 ถ้า s เป็นระยะทางระหว่างเรด้ากับเครื่องบิน ซึ่งเปลี่ยนแปลงลดลงด้วยอัตรา 400 ไมล์ต่อชั่วโมง โดยเครื่องบินบินในระดับที่สูงคงที่ 6 ไมล์ จงหาว่าเมื่อ s เป็น 10 ไมล์ แล้ว อัตราเร็วตามแนวราบของเครื่องบินเป็นเท่าไหร่

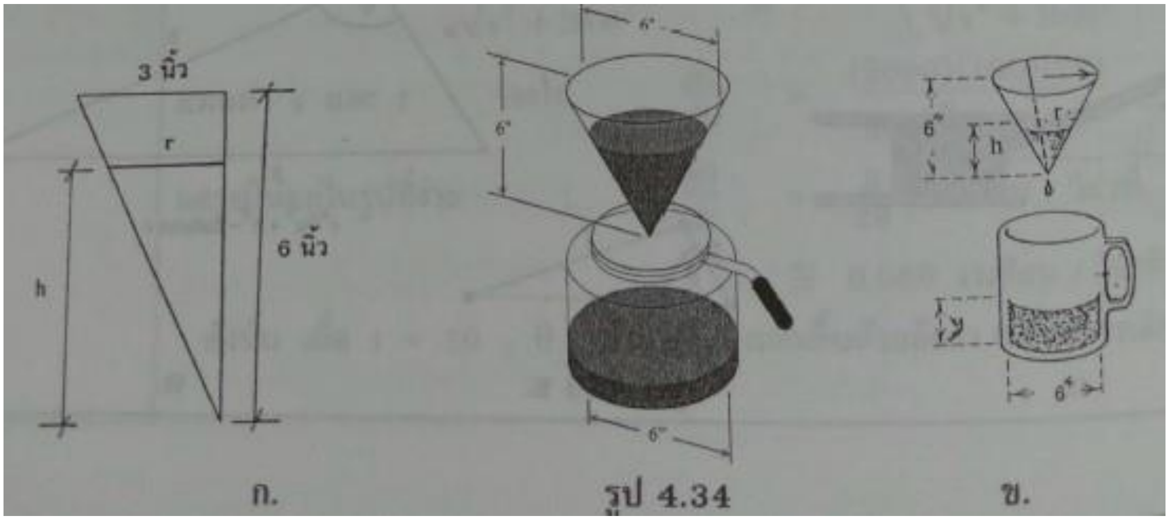


รูปที่ 3.8

ตัวอย่างที่ 3.24 ในการชงกาแฟครั้งหนึ่งได้ใช้กรวยกลมเป็นตัวกรองของกากกาแฟ แล้วปล่อยกาแฟหยดลงไปในถ้วยที่เป็นทรงกระบอก ด้วยอัตรา 10 ลูกบาศก์นิ้ว/วินาที ถ้ากรวยและถ้วยมีขนาดต่างๆดังรูปที่ 3.9 จงหาว่า

ก.ระดับกาแฟในถ้วยจะเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเท่าใด เมื่อกาแฟในกรวยกรองสูง 5 นิ้ว

ข.ระดับกาแฟในกรวยกรองลดลงด้วยอัตราเท่าใด เมื่อขณะเดียวกับข้อ ก.



รูปที่ 3.9

แบบฝึกหัดที่ 3.3

1.) ด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัส ขยายออกในอัตรา 1 ซม./วินาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาตรเมื่อความยาวของแต่ละด้านมีค่า

ก. 5 ซม. ข. 10 ซม. ค. x ซม.

2.) เรือแล่นขนานกับชายฝั่งด้วยความเร็ว 12 ไมล์/ชม. และอยู่ห่างจากฝั่ง 4 ไมล์ ในขณะเดียวกันนั้น เรืออยู่ห่างจากกระโจมไฟที่อยู่ริมฝั่งเป็นระยะ 5 ไมล์ จงหาว่าเรือจะแล่นเข้าหากระโจมไฟด้วยอัตราเร็วเท่าไหร่

3.) ถังเก็บน้ำเป็นรูปกรวยกลมวางในลักษณะหงายขึ้น (vertex down) มีความสูง 10 ฟุต ปากถังมีรัศมี 15 ฟุต สมมติน้ำรั่วออกจากก้นถังด้วยอัตราคงที่ 1 ฟุต^3/วินาที ขณะเดียวกันมีน้ำไหลเข้าสู่ถังด้วยอัตรา c ฟุต^3/วินาที จงหาว่าเมื่อระดับน้ำสูงขึ้นในอัตรา 4 ฟุต/วินาที และระดับน้ำสูง(ลึก) 2 ฟุต ค่า c จะมีค่าเท่าไร

4.) เด็กคนหนึ่งยืนมองเครื่องบินอยู่สูง 5 กม. จากพื้นดิน ให้ s เป็น ระยะทางระหว่างเด็กกับเครื่องบิน ซึ่งเปลี่ยนแปลงลดลงด้วยอัตราเร็ว 10 กม./วินาที ถ้า $s = 13$ กม. แล้ว อัตราเร็วตามแนวราบของเครื่องบินเป็นเท่าไร

5.) ถังน้ำรูปกรวยกลมรัศมี 10 ซ.ม. และสูง 24 ซ.ม. ซึ่งจุดยอดอยู่ด้านล่าง ถ้าน้ำไหลเข้าถึงด้วยอัตรา 20 ซ.ม.^{3}/วินาที จงหาว่าความสูงของน้ำจะเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเท่าใด ขณะที่น้ำสูง 16 ซ.ม.

6.) ถังเก็บน้ำรูปกรวยกลมสูง 10 เมตร รัศมีที่ปากกรวย 5 เมตร ปล่อยให้น้ำไหลออกที่ก้นถังด้วยอัตรา $0.08\sqrt{h}$ เมตร^3/วินาที โดยให้ h เป็นความสูงของน้ำในกรวย ขณะเวลา t ใดๆ และที่ปากถังปล่อยให้น้ำไหลเข้าด้วยอัตราคงที่ c เมตร^3/วินาที ถ้าความสูงของน้ำกำลังเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 0.02 เมตร^3/วินาที ขณะที่ความสูงเป็น $\frac{25}{4}$ เมตร จงหาค่า c

7.) แก๊สรั่วออกจากบอลลูนทรงกลมด้วยอัตรา 4 ลูกบาศก์ฟุตต่อนาที พื้นที่ผิวของบอลลูนหดลงด้วยอัตราเร็วเท่าไร เมื่อรัศมีของบอลลูน เท่ากับ 28 ฟุต

8.) ในการชงกาแฟครั้งหนึ่งได้ใช้กรวยกลมเป็นตัวกรองของกากกาแฟ แล้วปล่อยกาแฟหยดลงไปในถ้วยที่เป็นทรงกระบอก ด้วยอัตรา 8 ลูกบาศก์นิ้ว/วินาที ถ้ากรวยและถ้วยมีขนาดต่างๆดังรูปที่ 3.9 จงหาว่า

ก.ระดับกาแฟในถ้วยจะเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเท่าใด เมื่อกาแฟในกรวยกรองสูง 4 นิ้ว

ข.ระดับกาแฟในกรวยกรองลดลงด้วยอัตราเท่าใด เมื่อขณะเดียวกับข้อ ก.

9.) อากาศกำลังถูกสูบเข้าไปในลูกบอลทรงกลมด้วยอัตรา 5 ลูกบาศก์นิ้วต่อนาที ดังแสดงในรูปที่ 3.7 จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมี เมื่อรัศมี 3 นิ้ว

3.5.3 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด (Maximum and Minimum Value)

3.5.3.1 ค่าสุดขีดบนช่วง (Extrema on an Interval)

บทนิยามที่ 3.8 ให้ฟังก์ชัน f ซึ่งนิยามบน I ถ้ามีจำนวนจริง u ใน I ซึ่งทำให้ $f(u) \geq f(x)$ ทุกๆ x ใน I แล้ว เราจะกล่าวว่า $f(u)$ คือ**ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ (Absolute Maximum)** ของ f บน I และเราจะกล่าวว่า**ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ** f อยู่ที่ u ถ้ามีจำนวนจริง v ใน I ซึ่งทำให้ $f(v) \leq f(x)$ ทุกๆ x ใน I แล้ว เราจะกล่าวว่า $f(v)$ คือ**ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ (Absolute Maximum)** ของ f บน I และเราจะกล่าวว่า**ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ** f อยู่ที่ v

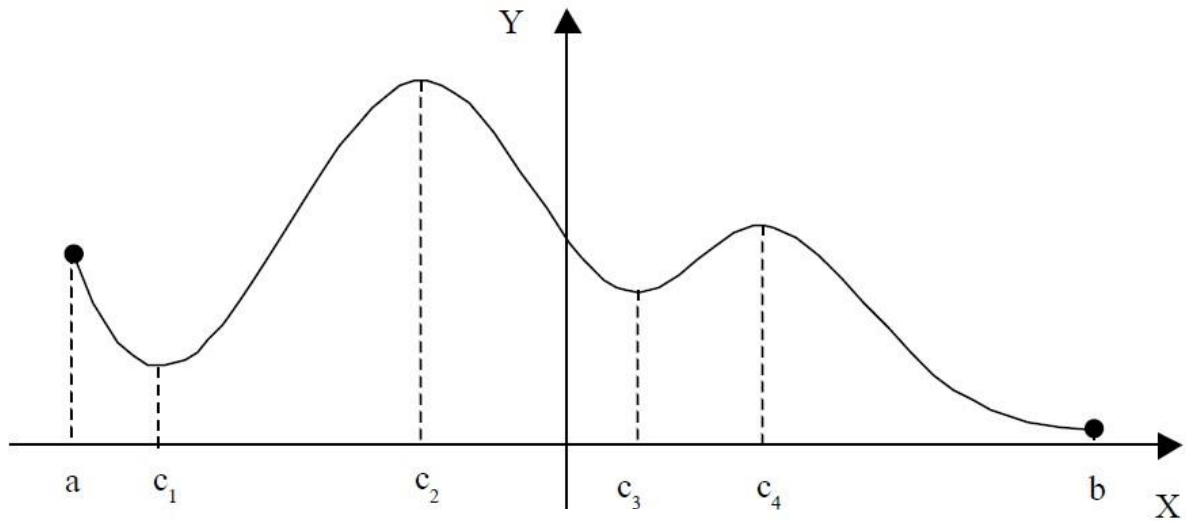
เราเรียกค่าสูงสุดสัมบูรณ์หรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันว่า *ค่าสุดขีดสัมบูรณ์* (absolute extremum)

บทนิยามที่ 3.9 ให้ฟังก์ชัน f ซึ่งนิยามบน I และ $c \in I$

จะกล่าวว่า f มีจุดสูงสุดสัมพัทธ์ (Local Maximum หรือ Relative Maximum) ที่ c เมื่อมีช่วงเปิด $(a, b) \subseteq I$ โดยที่ $c \in (a, b)$ และ $f(c) \geq f(x)$ สำหรับทุกๆ $x \in (a, b)$

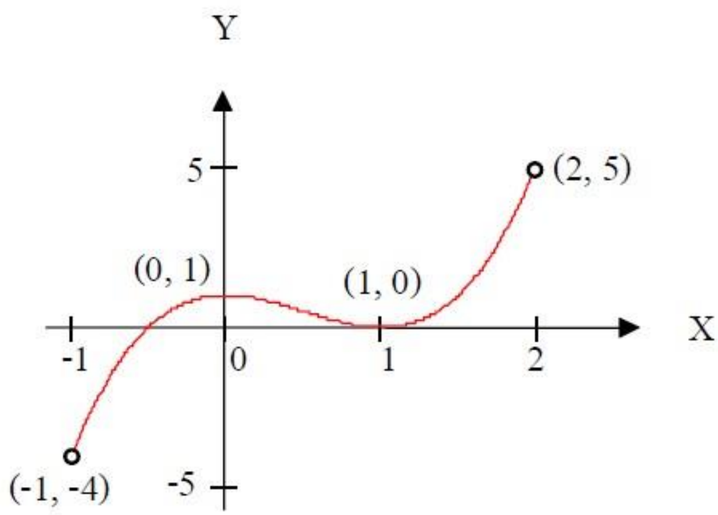
จะกล่าวว่า f มีจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ (Local Minimum หรือ Relative Minimum) ที่ c เมื่อมีช่วงเปิด $(a, b) \subseteq I$ โดยที่ $c \in (a, b)$ และ $f(c) \leq f(x)$ สำหรับทุกๆ $x \in (a, b)$

เราเรียกค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันว่า *ค่าสุดขีดสัมพัทธ์* (local extremum หรือ relative extremum)



รูปที่ 3.11

ตัวอย่างที่ 3.25 ฟังก์ชัน $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1, -1 < x < 2$



รูปที่ 3.12

3.5.3.2 การหาได้ของค่าสุดขีด (Exitence of Extreme Values)

เนื่องจากฟังก์ชันหนึ่งอาจจะมีค่าสุดขีดหรือไม่มีก็ได้ เราจึงควรจะมีวิธีตรวจสอบว่า ค่าสุดขีดของฟังก์ชันนั้น จะมีหรือไม่ด้วยทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.7 ถ้าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง และนิยามบนช่วงปิด $[a,b]$ แล้ว f จะมีค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ บน $[a,b]$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่อง หรือไม่นิยามบนช่วงปิด ทฤษฎีจะนำไปใช้ไม่ได้ ตัวอย่างเช่น

$$f=\begin{cases} 2 & ,0\le x\le 1 \\ -3x+7 & ,1<x\le 2\end{cases}$$

จะเห็นว่า f นิยามบนช่วง $[0,2]$ แต่ f ไม่ต่อเนื่องที่ $x=1$ เพราะว่า $\lim_{x\to 1} f(x)$ หาค่าไม่ได้ และ ฟังก์ชัน $g(x)=x\ ,0<x<2$ ต่อเนื่องสำหรับช่วงเปิด $(0,2)$ แต่ฟังก์ชันนี้ไม่มีทั้งค่าสูงสุดสัมบูรณ์บนช่วงเปิด $(0,2)$

บทนิยามที่ 3.10 ให้จำนวนจริง c ในโดเมนของฟังก์ชัน f ซึ่งทำให้ $f'(c)=0$ หรือ $f'(c)$ หาค่าไม่ได้ เราจะเรียก จำนวนจริง c ว่า **จำนวนวิกฤต (Critical number)** และเรียก $\left(c,f(c)\right)$ ว่า **จุดวิกฤต (Critical Point) ของฟังก์ชัน f**

ตัวอย่างที่ 3.25 จงหาจำนวนวิกฤตของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1.) $f(x)=6-x^2$

(2.) $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$

(3.) $f(x)=\frac{1}{x-2}$

(4.) $f(x)=\frac{(x-2)^{2/3}}{x}$

ทฤษฎีบทที่ 3.8 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และนิยามบนช่วงปิด $[a,b]$ ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ของ f จะเป็น ค่าที่มากที่สุด และค่าที่น้อยที่สุด ตามลำดับ ซึ่งหาได้จาก

(1) ค่าของ f ณ จำนวนวิกฤต ในช่วงเปิด (a,b)

(2) $f(a)$ และ $f(b)$ ซึ่งเป็นค่าของ f ของจำนวนที่อยู่ที่ปลายช่อง

ตัวอย่างที่ 3.26 จงหาจุดสูงสุดสัมพัทธ์ และจุดต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน

(1) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$ บน $[0,2]$

(2) $f(x) = \frac{(x-2)^{2/3}}{x}$ บน $[1,10]$

ตัวอย่างที่ 3.27 จงหาจุดสูงสุดสัมบูรณ์ และจุดต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & , 0 \le x \le 2 \\ x^2 - 5x + 9, & 2 < x \le 3 \end{cases}$$

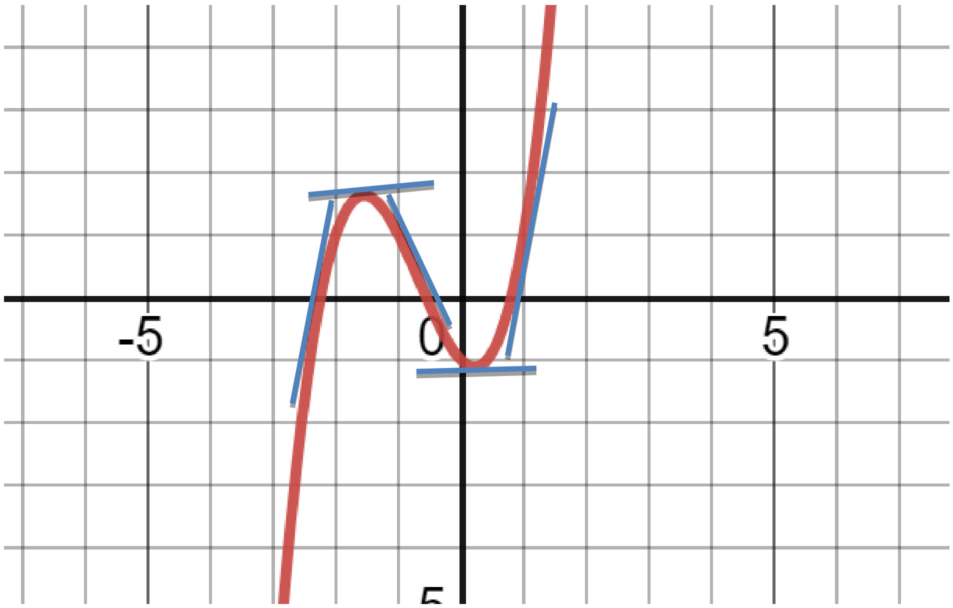
ตัวอย่างที่ 3.28 จงหาค่าขีดสุดของ $f(x) = 2x - 3x^{2/3}$ บนช่วง $[-1,3]$

3.5.4 การทดสอบการเป็นฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด

บทนิยามที่ 3.11 ให้ f เป็นฟังก์ชันของจำนวนจริง

1.) f เป็น**ฟังก์ชันเพิ่ม (Increasing Function)** บนช่วง I ถ้าสำหรับจำนวนจริง x_1, x_2 ใดๆ ใน I ซึ่ง $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$

2.) f เป็น**ฟังก์ชันลด (Decreasing Function)** บนช่วง I ถ้าสำหรับจำนวนจริง x_1, x_2 ใดๆ ใน I ซึ่ง $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$



รูปที่ 3.13

จากรูปที่ 3.13 จะพบว่าความชันของเส้นสัมผัสมีค่าเป็นบวก เมื่อ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และความชันของเส้นสัมผัสเป็นลบ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันลด แต่เนื่องจากความชันของเส้นสัมผัสของ f คือ $f'(x)$ ดังนั้น ถ้า $f'(x) > 0$ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มและ ถ้า $f'(x) < 0$ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันลด

ทฤษฎีบทที่ 3.9 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ และหาอนุพันธ์ได้บน (a, b)

1.) ถ้า $f'(x) > 0$ ตลอดช่วง (a, b) แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[a, b]$

2.) ถ้า $f'(x) < 0$ ตลอดช่วง (a, b) แล้ว f เป็นฟังก์ชันลดบน $[a, b]$

3.) ถ้า $f'(x) = 0$ ตลอดช่วง (a, b) แล้ว f เป็นฟังก์ชันคงที่

ตัวอย่างที่ 3.29 จงพิจารณาว่า $f(x) = x^2 - 4x + 5$ มีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงบนช่วงใดบ้าง

ตัวอย่างที่ 3.30 จงพิจารณาว่า $f(x) = x^3 - 3x + 2$ มีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงบนช่วงใดบ้าง

แบบฝึกหัดที่ 3.4 จงหาจำนวนวิกฤตของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.) $f(x) = 3x^2 - x^3 + 9x - 1$

2.) $f(x) = \frac{1}{x-5}$

3.) $f(x) = \frac{1}{x+3}$

4.) $f(x) = 8x^2 + 5x - 3$

5.) $f(x) = x^3 + 5x^2 + 7x$

6.) $f(x) = \frac{1}{6+x}$

7.) $f(x) = \frac{1}{x-4}$

8.) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$

9.) $f(x) = \frac{1}{x-7}$

10.) $f(x) = -2x^3 + \frac{5}{2}x^2 + x$

แบบฝึกหัดที่ 3.5 จงหาจุดสูงสุดสัมพัทธ์หรือจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันในแบบฝึกหัดที่ 3.4

แบบฝึกหัดที่ 3.6

1.) จงพิจารณาว่า $f(x) = 3x^2 - x^3 + 9x - 1$ มีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงบนช่วงใดบ้าง

2.) จงพิจารณาว่า $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ มีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงบนช่วงใดบ้าง

3.) จงพิจารณาว่า $f(x) = 5 + 10x - x^2$ มีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงบนช่วงใดบ้าง

4.) จงพิจารณาว่า $f(x) = x^2 - 2x - 3$ มีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงบนช่วงใดบ้าง

5.) จงพิจารณาว่า $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ มีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงบนช่วงใดบ้าง

6.) จงพิจารณาว่า $f(x) = x^2 - 4x + 3$ มีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงบนช่วงใดบ้าง

บทที่ 4 ปริพันธ์และการประยุกต์

4.1 ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

บทนิยามที่ 4.1 ปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f คือ ฟังก์ชัน F โดยที่ $F'(x) = f(x)$ เมื่อ $f(x)$ หาค่าได้

ตัวอย่างที่ 4.1

1. $f(x) = 3x^2$ จะได้ $F(x) = x^3$ แต่ยังมี $G(x) = x^3 + 1, H(x) = x^3 - 2$ ดังนั้น $T(x) = x^3 + c$ จะเป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 3x^2$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใดๆ

2. $f(x) = x^3$ จะได้ $F(x) = \frac{x^4}{4} + c$

3. $f(x) = \frac{x^4}{4}$ จะได้ $F(x) = \frac{x^5}{20} + c$

ทฤษฎีบทที่ 4.1 กำหนดให้ $F'(x) = f(x)$ สำหรับ x บนช่วงเปิด I แล้ว ปฏิยานุพันธ์ G ของ f บน I จะอยู่ในรูปของ $G(x) = F(x) + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่

จากทฤษฎีบทที่ 4.1 ปฏิยานุพันธ์ทั้งหมดของฟังก์ชัน f คือ $F(x) + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว จึงเรียก $F(x) + c$ ว่าปฏิยานุพันธ์ทั่วไป (general antiderivative)

บทนิยามที่ 4.2 ให้ $F(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ $F'(x) = f(x)$ จะเรียก $F(x) + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ว่า **ปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน $f(x)$ เทียบกับ x** แล้วจะเขียนแทนด้วย

$$\int f(x)dx$$

นั่นคือ $\int f(x)dx = F(x) + c$

เราเรียก $\int$ ว่าเครื่องหมายปริพันธ์ (integral sign) เรียก $f(x)$ ว่าปริพัทธ์ (integrand) เรียก c ว่า ค่าคงตัวของปริพันธ์ (constant of integration) และ dx หมายถึง การหาปริพันธ์เทียบกับตัวแปรอิสระ x

หมายเหตุ 1. สำหรับตัวแปรในการหาปริพันธ์ นอกจากตัวแปรอิสระ x แล้วนั้นสามารถเปลี่ยนไปใช้ตัวแปรอิสระอื่นได้ตามความเหมาะสม เช่น

$$\int f(z)dz = F(z) + c$$

2. สามารถเขียน dx รวมกันกับปริพัทธ์ได้ เช่น $\int 1dx$ เขียนใหม่ได้เป็น $\int dx$ หรือ $\int \frac{1}{x}dx$ เขียนใหม่ได้เป็น $\int \frac{dx}{x}$

สูตรพื้นฐานในการปริพันธ์ไม่จำกัดเขต เป็นดังนี้

1. $\int dx = x + c$
2. $\int k\,dx = kx + c$
3. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ เมื่อ $n \neq -1$
4. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$

เมื่อ k และ n เป็นค่าคงตัวใดๆ

ตัวอย่างที่ 4.2 จงหา $F(x)$ ฟังก์ชันปริพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $\int 3\ dx$
2. $\int x^2\, dx$
3. $\int \frac{1}{x^2}\ dx$
4. $\int 4x\, dx$

ทฤษฎีบทที่ 4.2 ให้ f, g และ $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วง $[a,b]$ และ $k, k_1, k_2, \ldots, k_n$ เป็นค่าคงตัว

1. $\int kf(x)\, dx = k\int f(x)\, dx$
2. $\int [f(x)+g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$
3. $\int [k_1f_1(x)+k_2f_2(x) + \cdots + k_nf_n(x)]dx = \int k_1f_1(x)dx + \int k_2f_2(x)dx + \cdots + \int k_nf_n(x)dx$

ตัวอย่างที่ 4.3 จงหา

1. $\int (4x^3+2x^2-5x)\, dx$
2. $\int (\frac{x}{2}+3)\, dx$
3. $\int (\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3})\, dx$
4. $\int (\frac{3}{x^2}-4x^3+\frac{x^2}{2})\, dx$
5. $\int (\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}})\, dx$
6. $\int (3\sqrt{x}-4\sqrt{x^3})\, dx$

แบบฝึกหัดที่ 4.1 จงหา

1. $\int (3x+2)\,dx$
2. $\int (1-4x)\,dx$
3. $\int (2\sqrt{x}-\frac{3}{x})\,dx$
4. $\int (\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x})\,dx$

4.2 ทฤษฎีพื้นฐานสำหรับแคลคูลัส

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทสำคัญในวิชาแคลคูลัสและใช้ในการหาค่าปริพันธ์จำกัดเขต

ทฤษฎีบทที่ 4.3 ทฤษฎีพื้นฐานสำหรับแคลคูลัส (Fundamental Theorem of Calculus)

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f บนช่วง $[a,b]$ จะได้ว่า

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

4.1 ข้อสังเกต 1. ถ้า f สามารถหาปฏิยานุพันธ์ได้ แล้วจะสามารถหาค่าอินทิกรัลได้ทันที

2. เพื่อความสะดวก จะใช้สัญลักษณ์ต่อไปนี้

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

เช่น $\int_1^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3} = 9-\frac{1}{3} = 8\,\frac{2}{3}$

3. ปฏิยานุพันธ์ไม่จำเป็นต้องมีค่า c ปรากฎอยู่ เนื่องจาก

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)+c]_a^b$$
$$= [F(b)+c]-[F(a)+c]$$
$$= F(b)-F(a)$$

ตัวอย่างที่ 4.4 จงหาค่าอินทิกรัลจำกัดเขตต่อไปนี้

1. $\int_1^2 (x+1)\,dx$
2. $\int_{-1}^1 (\frac{x^3}{3}-5)\,dx$
3. $\int_0^1 \left(\sqrt{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx$

แบบฝึกหัดที่ 4.2 จงหาค่าอินทิกรัลจำกัดเขต

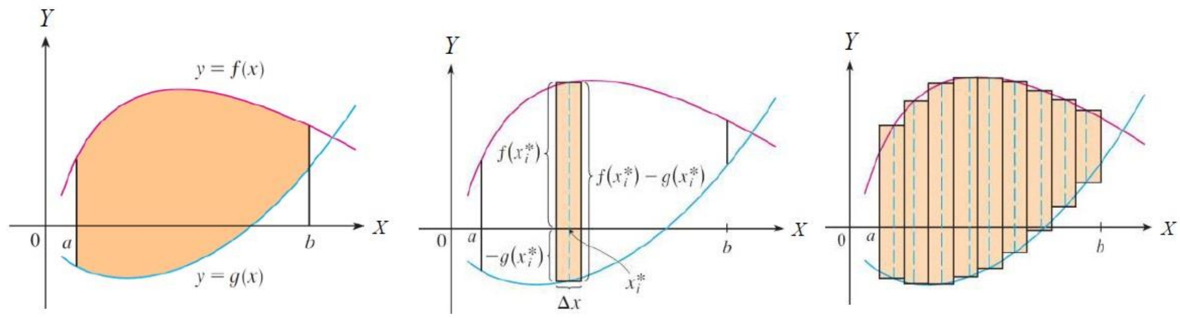
1. $\int_0^2 (3x^2-2x+8)\,dx$
2. $\int_1^3 (4x^3+5x-1)\,dx$
3. $\int_0^1 (2\sqrt{x}-\frac{x^3}{3})\,dx$
4. $\int_0^1 (3\sqrt{x}+\frac{x^5}{5})\,dx$

4.3 การประยุกต์ของปริพันธ์

4.3.1 พื้นที่ของบริเวณระหว่างเส้นโค้งสองเส้น

ในหัวข้อนี้เราจะหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นโค้งสองเส้น โดยใช้ปริพันธ์

กำหนดให้ $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และ $f(x) \geq g(x)$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ จะได้ว่า บริเวณซึ่งปิดล้อมด้านบนด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ ปิดด้านล่างด้วยเส้นโค้ง $y = g(x)$ และบนด้านซ้ายและด้านขวาปิดด้วยเส้นตรง ดังรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1

จากรูปที่ 4.1 จะเห็นได้ว่า พื้นที่บริเวณซึ่งปิดล้อมระหว่างเส้นโค้งสองเส้น ให้แทนด้วย A คือ ผลบวกของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปเล็กหลาย ๆ รูปข้างต้น นิยามโดย

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\Delta x$$

ซึ่งเรียกว่า ผลบวกรีมัน ขณะที่ $\Delta x \to 0$ ผลรวมเข้าใกล้ $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$ เพราะว่า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้น พื้นที่ของบริเวณดังกล่าวเข้าสู่ค่าของอินทิกรัลจำกัดเขต นั่นคือ

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

ขั้นตอนการหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นโค้งสองเส้น

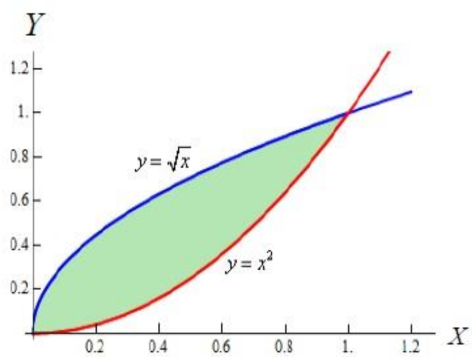
ขั้นที่ 1 วาดกราฟของเส้นโค้งที่กำหนดให้ทั้งสอง และเขียนสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่เป็นตัวแทน ขนานกับแกน y โดยปิดด้านบนด้วยเส้นโค้ง f และปิดด้านล่างด้วยเส้นโค้ง g จะทำให้ช่วยหาลิมิตของอินทิเกรต ถ้าเรายังไม่ทราบลิมิตของการอินทิเกรต

ขั้นที่ 2 หาลิมิตของการอินทิเกรต

ขั้นที่ 3 เขียนสูตรสำหรับ $[f(x) - g(x)]$ แล้วจัดรูปให้ง่ายขึ้นถ้าทำได้

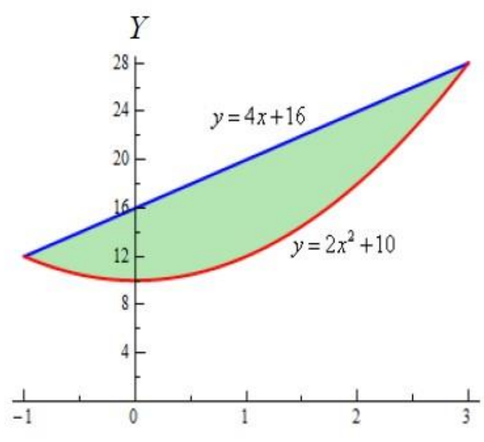
ขั้นที่ 4 อินทิเกรต $[f(x) - g(x)]$ จาก a ถึง b แล้วจำนวนที่ได้จากการอินทิเกรต คือพื้นที่ระหว่างเส้นโค้งที่ต้องการ

ตัวอย่างที่ 4.5 จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y = x^2$ และ $y = \sqrt{x}$



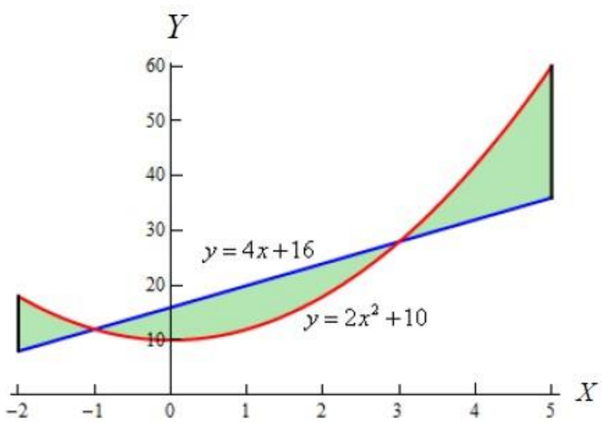
รูปที่ 4.2

ตัวอย่างที่ 4.6 จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y = 2x^2 + 10$ และ $y = 4x + 16$



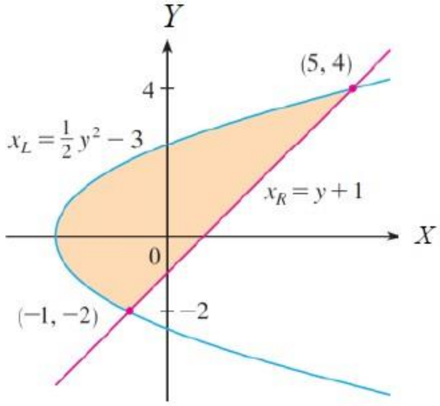
รูปที่ 4.3

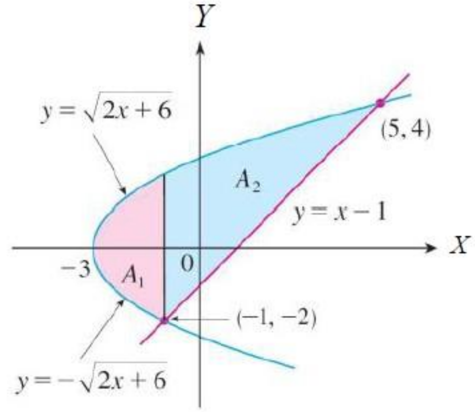
ตัวอย่างที่ 4.7 จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y = 2x^2 + 10$ และ $y = 4x + 16$, $x = -2$ และ $x = 5$



รูปที่ 4.4

ตัวอย่างที่ 4.8 จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y = x - 1$ และ $x = \frac{1}{2}y^2 - 3$





รูปที่ 4.5

แบบฝึกหัดที่ 4.3

(1.) จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยแกน X และ $y = 1 + x^2, 0 \leq x \leq 3$

(2.) จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยแกน X และ $y = 2x + 3\,, 0 \leq x \leq 2$

(3.) จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยแกน X และ $y = 1 + x^3, 0 \leq x \leq 4$

(4.) จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยแกน X และ $y = 4x(x - 1), 0 \leq x \leq 2$

(5.) จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยแกน X และ $y = x^2 - x - 2, -2 \leq x \leq -1$

(6.) จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยแกน X และ $y = x^3 - 1, -1 \leq x \leq 0$

(7.) จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 2 - x^2$ และ $y = -x$

(8.) จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^4 + 2x^2$ และ $y = 28 - x^2$

(9.) จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 + 2$ และ $y = -x\,, 0 \leq x \leq 1$

(10.) จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 10x - x^2$และ $y = 3x - 8$

(11.) จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 3x^3 - x^2 - 10x$ และ $y = 2x - x^2$

(12.) จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 - 4$ และ $y = -2x - x^2$, $-3 \leq x \leq 1$